三次邂逅演绎不一般的精彩
——对三道市级调研题的一点思考

江苏省海门中学（226100） 顾旭东

摘要 调研卷第19题的最后一问从某种意义上讲代表了命题人钻研的方向，而无独有偶2019年南通高三三次调研测试中的第19题则让我们感受到命题者心有灵犀不点通的偏爱，值得我们回味与探源. 这三题表面上分别考查数列问题、切线问题、零点问题，而实际的命题背景都与对数平均有关. (若a,b为两不相等的正实数， 则$\sqrt{ab}<\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b}<\dfrac{a+b}{2}$).

关键词 公式；极值；对数平均

一、原题展现

（南通市2019届高三第三次调研测试第19题）已知数列$\{a_n\}$满足$(na_{n-1}-2)a_n=(2a_n-1)a_{n-1}\ (n\geq 2)$, $b_n=\dfrac{1}{a_n}-n(n\in N^*)$.

(1)若$a_1=3$, 证明：$\{b_n\}$是等比数列；

(2)若存在$k\in N^*$, 使得$\dfrac{1}{a_k},\dfrac{1}{a_{k+1}},\dfrac{1}{a_{k+2}}$成等差数列.

①求数列$\{a_n\}$的通项公式；

②证明：$\ln n+\dfrac{1}{2}a_n>\ln(n+1)-\dfrac{1}{2}a_{n+1}$.

解：（1）（2）①略.

②要证$\ln n+\dfrac{1}{2}a_n>\ln(n+1)-\dfrac{1}{2}a_{n+1}$, 即证$\dfrac{1}{2}(a_n+a_{n+1})>\ln\dfrac{n+1}{n}$,

由①知$a_n=\dfrac{1}{n}$, 即证$\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}>2\ln\dfrac{n+1}{n}$.

设$t=\dfrac{n+1}{n}$, 则$\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}=t-1+\dfrac{t-1}{t}=t-\dfrac{1}{t}$, 且$t>1$,

从而只需证，当$t>1$时, $t-\dfrac{1}{t}>2\ln t$.

设$f(x)=x-\dfrac{1}{x}-2\ln x(x>1)$, 则$f'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}=\left(\dfrac{1}{x}-1\right)^2>0$,

所以$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，

所以$f(x)>f(1)=0$, 即$x-\dfrac{1}{x}>2\ln x$,

因为$t>1$, 所以$t-\dfrac{1}{t}>2\ln t$, 所以原不等式得证.

另解：要证 $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}>2\ln\frac{n+1}{n}$. 即证 $\frac{1}{2n}+\frac{1}{2(n+1)}>\ln(n+1)-\ln n$,

即证 $\frac{2n(n+1)}{n+(n+1)}<\frac{1}{\ln(n+1)-\ln n}$,

因为 $\sqrt{ab}<\frac{a-b}{\ln a-\ln b}<\frac{a+b}{2}\Rightarrow\sqrt{n(n+1)}<\frac{n+1-n}{\ln(n+1)-\ln n}$,

只需证明 $\frac{2n(n+1)}{n+n+1}<\sqrt{n(n+1)}$ 即 $n+(n+1)>2\sqrt{n+(n+1)}$.

熟悉的套路不由得让我们把目光转移到南通前两次的调研试卷.

（南通市2019届高三第二次调研测试第19题）已知函数 $f(x)=2\ln x+\frac{1}{2}x^2-ax$，$a\in\mathbf{R}$.

（1）当 $a=3$ 时，求函数 $f(x)$ 的极值；

（2）设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的切线方程为 $y=g(x)$，若函数 $y=f(x)-g(x)$ 是 $(0，+\infty)$ 上的单调增函数，求 x_0 的值；

（3）是否存在一条直线与函数 $y=f(x)$ 的图象相切于两个不同的点？并说明理由.

解（1）（2）①略.

（3）假设存在一条直线与函数 $f(x)$ 的图象有两个不同的切点 $T_1(x_1，y_1)$，$T_2(x_2，y_2)$，

不妨 $0<x_1<x_2$，则 T_1 处切线 l_1 的方程为：$y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)$，

T_2 处切线 l_2 的方程为：$y-f(x_2)=f'(x_2)(x-x_2)$.

因为 l_1，l_2 为同一直线，所以 $\begin{cases}f'(x_1)=f'(x_2),\\ f(x_1)-x_1f'(x_1)=f(x_2)-x_2f'(x_2).\end{cases}$

即 $\begin{cases}\frac{2}{x_1}+x_1-a=\frac{2}{x_2}+x_2-a,\\ 2\ln x_1+\frac{1}{2}x_1^2-ax_1-x_1\left(\frac{2}{x_1}+x_1-a\right)=2\ln x_2+\frac{1}{2}x_2^2-ax_2-x_2\left(\frac{2}{x_2}+x_2-a\right).\end{cases}$

整理得，$\begin{cases}x_1x_2=2,\\ 2\ln x_1-\frac{1}{2}x_1^2=2\ln x_2-\frac{1}{2}x_2^2.\end{cases}$

消去 x_2 得，$2\ln\frac{x_1^2}{2}+\frac{2}{x_1^2}-\frac{x_1^2}{2}=0$. ①

令 $t=\frac{x_1^2}{2}$，由 $0<x_1<x_2$ 与 $x_1x_2=2$，得 $t\in(0，1)$，

记 $p(t)=2\ln t+\frac{1}{t}-t$，则 $p'(t)=\frac{2}{t}-\frac{1}{t^2}-1=-\frac{(t-1)^2}{t^2}<0$，

所以 $p(t)$ 为 $(0，1)$ 上的单调减函数，所以 $p(t)>p(1)=0$.

从而①式不可能成立，所以假设不成立，从而不存在一条直线与函数 $f(x)$ 的图象有两个不同的切点.

另解：$f'(x_1)=f'(x_2)=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$,

所以 $\dfrac{2}{x_1}+x_1-a=\dfrac{2}{x_2}+x_2-a=\dfrac{2(\ln x_1-\ln x_2)+\frac{1}{2}\left(x_1{}^2-x_2{}^2\right)-a(x_1-x_2)}{x_1-x_2}$

得到 $\dfrac{2}{x_1}+x_1=\dfrac{2}{x_2}+x_2=\dfrac{2(\ln x_1-\ln x_2)}{x_1-x_2}+\dfrac{1}{2}(x_1+x_2)$,

再令 $\dfrac{2}{x_1}+x_1=\dfrac{2}{x_2}+x_2=\dfrac{2(\ln x_1-\ln x_2)}{x_1-x_2}+\dfrac{1}{2}(x_1+x_2)=t$.

令

则 $\begin{cases}\dfrac{2}{x_1}+x_1=t\\ \dfrac{2}{x_2}+x_2=t\end{cases}$ 推出 $\begin{cases}x_1x_2=2\\ x_1+x_2=t\end{cases}$

所以 $\dfrac{2(\ln x_1-\ln x_2)}{x_1-x_2}+\dfrac{1}{2}(x_1+x_2)=x_1+x_2$

得到 $\dfrac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}=\dfrac{4}{x_1+x_2}$,因为 $\sqrt{x_1x_2}<\dfrac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}<\dfrac{x_1+x_2}{2}$

推出 $\sqrt{2}<\dfrac{4}{x_1+x_2}<\dfrac{x_1+x_2}{2}$，即 $\begin{cases}x_1+x_2<2\sqrt{2}\\ x_1+x_2>2\sqrt{2}\end{cases}$,所以矛盾，故不存在.

（南通市 2019 届高三第一次调研测试第 19 题）已知函数 $f(x)=\dfrac{a}{x}+\ln x(a\in R)$.

若 $f(x)$ 有两个不相同的零点 x_1,x_2.

证明：$x_1f'(x_1)+x_2f'(x_2)>2\ln a+2$.

证明：设 $p=x_1f'(x_1)+x_2f'(x_2)=1-\dfrac{a}{x_1}+1-\dfrac{a}{x_2}=2-\left(\dfrac{a}{x_1}+\dfrac{a}{x_2}\right)$.

又 $\begin{cases}\ln x_1+\dfrac{a}{x_1}=0\\ \ln x_2+\dfrac{a}{x_2}=0,\end{cases}$ 则 $p=2+\ln(x_1x_2)$.

下面证明 $x_1x_2>a^2$.

分析：$x_1x_2>a^2\Leftrightarrow\sqrt{x_1x_2}>a\Leftrightarrow\sqrt{x_1x_2}>\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}}$（由方程组推出 a 的表示）

$\Leftrightarrow\sqrt{x_1x_2}>\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}\cdot x_1x_2\Leftrightarrow\sqrt{x_1x_2}<\dfrac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}$.

点评：一而再再而三的考查，但是三次统计的数据显示学生学的都不甚理想，对于笔者执教

的四星级高中在第三次调研中得分也仅仅不过6.32分，意味着第三问很少有人能拿分，这就需要我们在课堂上重视学生的思维发展.解题重在悟，通着方能透过现象看到本质，登上胜利的彼岸.

二、回顾探源

不难发现这些题的背后都隐藏着这样的结论，由此可见命题者心有灵犀不点通的意图.

结论：若a,b为两不等的正实数，则$\sqrt{ab}<\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b}<\dfrac{a+b}{2}$.

证明：不妨设$a>b>0$．因为$\sqrt{ab}<\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b}\Leftrightarrow \ln\dfrac{a}{b}<\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}$，

令$\sqrt{\dfrac{a}{b}}=t(t>1)$，设$f(t)=2\ln t-t+\dfrac{1}{t}(t>1)$，

则$f'(t)=\dfrac{2}{t}-1-\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{-(t+1)^2}{t^2}<0$，所以$f(t)$在$(1,+\infty)$递减，又$\because f(1)=0$，

因此当$t>1$时，$f(t)=2\ln t-t+\dfrac{1}{t}<0$恒成立，即$\ln\dfrac{a}{b}<\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}$成立.

又因为$\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b}<\dfrac{a+b}{2}\Leftrightarrow \ln\dfrac{a}{b}>\dfrac{2(\frac{a}{b}-1)}{\frac{a}{b}+1}$，

令$\dfrac{a}{b}=t(t>1)$，$\mathrm{g}(t)=\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$，

则$g'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{4}{(t+1)^2}=\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，所以$\mathrm{g}(t)$在$(1,+\infty)$递增，又$\because \mathrm{g}(1)=0$，

因此当$t>1$时，$\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}>0$恒成立，即$\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b}<\dfrac{a+b}{2}$成立.

三、反思提升

站在一定的高度来体会这类问题的通性通法及解题的套路，培养学生遇水搭桥的能力，这就是我们后续要努力 的.而通过进一步研究，我 们发现对数平均不等式 还可以外延为

$a<\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}<\sqrt{ab}<\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b}<\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}<b$(当$0<a<b$时),在其中不妨令$x=\dfrac{b}{a}$,则

当$x\in(1,+\infty)$时，又可推出$1<\dfrac{2x}{1+x}<\sqrt{x}<\dfrac{x-1}{\ln x}<\sqrt{\dfrac{1+x^2}{2}}<x$,

当$x\in(0,1)$时，$x<\dfrac{2x}{1+x}<\sqrt{x}<\dfrac{x-1}{\ln x}<\sqrt{\dfrac{1+x^2}{2}}<1$,

进一步用e^{x_1}替换a,用e^{x_2}替换b,又可以得到一组关于指 数的不等式$e^{\frac{x_1+x_2}{2}}<\dfrac{e^{x_1}-e^{x_2}}{x_1-x_2}<\dfrac{e^{x_1}+e^{x_2}}{2}$,

如若再令$n=a,n+1=b$我们又可以打开了数列 的一块新天地,这里不再赘述，仅供同 行者命题时参考.

参考文献

[1]顾旭东.浮云虽遮眼 拔云可见日[J].中学数学研究2018（4）上半月

[2]谢德斌.对数平均不等式链及变式在高考导数题中的应用探究[J].中学数学研究2019（1）

上半月

作者简介：

顾旭东(1976-),江苏海门人，中学高级教师，市学科带头人，主要研究高中数学，多年任教高三，常利用社团指导学生写小论文，前后发表或辅导发表论文近 50 篇。移动电话号码13218257380，电子邮箱 hmgxd-001@163.com.